模块一 排列与组合（★★★）

强化训练

1．（2022·福建模拟·★★）某校开设 A 类选修课 4 门，B 类选修课 3 门，某位同学要从中选 3 门课，要求这三门课不是同一类，则不同的选法共有_____种.

答案：30

解析：按照选择两类选修课的门数分类考虑即可，若 A 类选 2 门，B 类选 1 门，则有 $C_4^2C_3^1=18$ 种选法；若 A 类选 1 门，B 类选 2 门，则有 $C_4^1C_3^2=12$ 种选法；由分类加法计数原理，不同的选法共有 $18+12=30$ 种.

2．（2023·新高考Ⅰ卷·★★）某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选 1 门，则不同的选课方案共有_____种.（用数字作答）

答案：64

解析：由于一共可以选 2 门或 3 门，所以据此分类，

若选 2 门，则只能体育类、艺术类各选 1 门，有 $C_4^1C_4^1=16$ 种选法；

若选 3 门，则可以体育 1 门艺术 2 门，或体育 2 门，艺术 1 门，有 $C_4^1C_4^2+C_4^2C_4^1=48$ 种选法；

由分类加法计数原理，不同的选课方案共有 $16+48=64$ 种.

3．（2023·成都模拟·★★）六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有（　　）

（A）192 种　（B）216 种　（C）240 种　（D）288 种

答案：B

解析：最左端和最右端这两个位置有特殊要求，应优先考虑，先考虑最左端，

①若最左端排甲，则其余位置可随意排，共有 $A_5^5=120$ 种排法；

②若最左端排乙，接下来甲不能排最右端，于是先考虑甲，可排中间 4 个位置，有 A_4^1 种排法，

其余位置可随意排，有 A_4^4 种，故这一类有 $A_4^1A_4^4=96$ 种排法；

由分类加法计数原理，不同的排法共有 $120+96=216$ 种.

4．（2023·重庆模拟·★★★）春节文艺汇演中需要将 A，B，C，D，E，F 六个节目进行排序，若 A，B 两个节目必须相邻，且都不能排在 3 号位置，则不同的排序方式有_____种.

答案：144

解析：元素必须相邻用捆绑法，先把 A，B 捆绑在一起，看成一个节目，与其余 4 个节目一起排列，

由于 A，B 都不能排在 3 号位置，所以捆绑后 A，B 不能排在如图所示的两个蓝色位置上，

结合 A，B 内部可交换顺序知 A，B 的排法有 $A_3^1A_2^2$ 种，其余 4 个节目可随便排，有 A_4^4 种，

由分步乘法计数原理，不同的排序方式共有 $A_3^1A_2^2A_4^4=144$ 种.

5.（2023 • 宁夏模拟 • ★★★）五声音阶是中国古乐基本音阶，故有成语“五音不全”，中国古乐中的五声音阶依次为宫、商、角、徵、羽，把这五个音阶排成一列，形成一个音序，若徵、羽两音阶相邻且在宫音阶之后，则可排成不同的音序的种数为_____.（用数字作答）

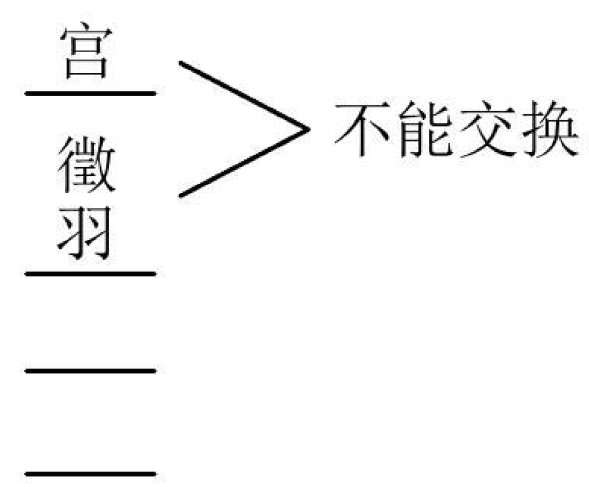
答案：24

解析：元素必须相邻用捆绑法，先把徵、羽捆绑在一起，看成一个音阶，与其余 3 个音阶一起排列，

如图，有 4 个位置，由于捆绑后的徵、羽都在宫之后，所以先排它们，从 4 个位置中任选 2 个位置即可，有 C_4^2 种选法，把宫和徵、羽排到选出的两个位置上去只有 1 种方法，不能交换，

徵、羽内部可交换顺序，有 A_2^2 种方法，最后再排商、角，有 A_2^2 种排法，

由分步乘法计数原理，可排成不同的音序的种数为 $C_4^2A_2^2A_2^2=24$.



6.（2022 • 盐城模拟 • ★★）2022 年冬奥会吉祥物“冰墩墩”与冬残奥会吉祥物“雪容融”有着可爱的外表和丰富的寓意，深受全国人民的喜爱. 某商店有 3 个不同造型的“冰墩墩”和 4 个不同造型的“雪容融”吉祥物展示在柜台上，要求“冰墩墩”和“雪容融”彼此间隔排列，则不同的排列方法有_____种.

答案：144

解析：间隔排列即不能相邻，元素不能相邻用插空法，先把 3 个“冰墩墩”排好，有 A_3^3 种排法，

排好后产生 4 个空位，把 4 个“雪容融”插空即可，有 A_4^4 种插法，故不同的排列方法有 $A_3^3A_4^4=144$ 种.

7.（2022 • 广州二模 • ★★★）现有甲、乙、丙、丁、戊、己 6 名同学在比赛后合影留念，若甲、乙二人必须相邻，且丙、丁二人不能相邻，则符合要求的排列方法有_____种.

答案：144

解析：元素相邻用捆绑，不相邻用插空，此处可分两步完成，第一步，先把甲乙捆绑，和戊、己一起排列，有 $A_3^3A_2^2$ 种排法，排好后如图；第二步，将丙、丁插空，有 4 个空位可插，故有 A_4^2 种插法；

由分步乘法计数原理，符合要求的排列方法有 $A_3^3A_2^2A_4^2=144$ 种.

____ 戊 ____ 甲乙 ____ 己 ____

8.（2022 • 青岛模拟 • ★★★）将 8 块完全相同的巧克力分配给 A，B，C，D 四人，每人至少分到 1 块且最多分到 3 块，则不同的分配方案共有_____种.（用数字作答）

答案：19

解析：可按每人分到的巧克力块数来进行分类，有 $2+2+2+2$，$3+2+2+1$，$3+3+1+1$ 三类，注意本题巧克力是完全相同的，所以只要块数相同，那么交换彼此的巧克力，仍是相同的分法，

①若为 $2+2+2+2$，则只有 1 种分法；

②若为 $3+2+2+1$，则可先从 4 人中选 2 人，分别拿 3 块和 1 块巧克力，有 A_4^2 种分法，

剩下的 2 人都拿 2 块巧克力，只有 1 种分法，所以这一类有 $A_4^2=12$ 种分法；

③若为$3+3+1+1$，则可先从 4 人中选 2 人，每人拿 3 块巧克力，有C_4^2种分法，

剩下的 2 人都拿 1 块巧克力，只有 1 种分法，所以这一类共有$C_4^2=6$种分法；

由分类加法计数原理，不同的分配方案共有$1+12+6=19$种.

【反思】在将若干元素分配给某几个对象的问题中，若元素是相同的，则只需关注每个对象分配的元素个数；若元素不同，那么除了关注每个对象分配几个元素之外，还应考虑分配的是哪几个元素.

9.（2021·全国乙卷·★★★）将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

（A）60 种　（B）120 种　（C）240 种　（D）480 种

答案：C

解法 1：志愿者人数比项目数多，故可先将志愿者进行分组，使组数与项目个数相等，便于安排，

将 5 名志愿者分成 4 组，人数设置只能为$2+1+1+1$，是局部均匀分组，需消序，有$\dfrac{C_5^2C_3^1C_2^1C_1^1}{A_3^3}=10$种分法，

再将 4 组志愿者派到 4 个项目，有$A_4^4=24$种派法，由分步乘法计数原理，不同的分配方案有$10\times24=240$种.

解法 2：由于只有 1 个项目要安排 2 名志愿者，故也可先把这个项目和安排的人确定下来，再安排其它项目，

从 4 个项目中选 1 个，有C_4^1种选法，从 5 名志愿者中选 2 名，安排到刚才选出的项目中，有C_5^2种选法，

余下 3 人和 3 个项目可随意安排，有A_3^3种方法，由分步乘法计数原理，不同的分配方案共有$C_4^1C_5^2A_3^3=240$种.

【反思】本题和上一题相比，不同之处是本题的 5 个人互不相同，上一题的 8 块巧克力是相同的，不同元素的分配问题用先分后派，而相同元素的分配问题，则直接考虑每个对象分到的个数即可.

10.（2023·全国模拟·★★★）安排 5 名学生去 3 个社区进行志愿者服务，每人只去 1 个社区，要求每个社区至少安排 1 名学生，则不同的安排方法有（　　）

（A）360 种　（B）300 种　（C）150 种　（D）125 种

答案：C

解法 1：学生人数比社区数多，故可先将学生进行分组，使组数与社区个数相等，便于安排，

将 5 名学生分成 3 组，按人数构成，有$3+1+1$和$2+2+1$两类，

若为$3+1+1$，则有$\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}=10$种分法；若为$2+2+1$，则有$\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}=15$种分法；

所以分组的方法共$10+15=25$种，分好组后，再把 3 组学生派到 3 个社区即可，有A_3^3种不同的派法，

由分步乘法计数原理，不同的安排方法有$25A_3^3=150$种.

解法 2：先看$3+1+1$这一类，可先把 3 人的社区安排好，

从 3 个社区中选 1 个，并从 5 名学生中选 3 人安排到该社区，有$C_3^1C_5^3$种安排方法，

余下的 2 人分别安排到剩下的两个社区，有A_2^2种安排方法，所以这一类共$C_3^1C_5^3A_2^2=60$种安排方法；

再看$2+2+1$这一类，有一个社区只安排 1 人，先把这个社区安排好，

从 3 个社区中选 1 个，并从 5 人中选 1 人安排到该社区，有$C_3^1C_5^1$种安排方法，

还剩 2 个社区（不妨假设剩 A，B 两个社区），每个安排 2 人，逐个安排即可，

不妨先考虑其中的 A 社区，可从余下 4 人中选 2 人，有 C_4^2 种安排方法，再考虑 B 社区，有 C_2^2 种安排方法，

所以这一类共有 $C_3^1C_5^1C_4^2C_2^2=90$ 种安排方法；

由分类加法计数原理，共有 $60+90=150$ 种安排方法.

11．（2022•昆明模拟•★★★）将 5 名冬奥会志愿者分配到北京、延庆、张家口三个赛区参加活动，北京赛区至少分配 2 名志愿者，其它赛区至少分配 1 名志愿者，每名志愿者只分配到 1 个赛区，则不同的分配方案共有（　　）

（A）80 种　（B）50 种　（C）40 种　（D）25 种

答案：A

解析：志愿者人数比赛区数多，故先将志愿者分组，使组数与赛区数相等，便于安排，5 人分 3 组，有 $3+1+1$ 和 $2+2+1$ 两种人数组成，由于北京至少分 2 名，所以分好组后，两种情况接下来的安排方法不同，故分类，

①若按 $3+1+1$ 分组，则分组的方法有 $\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种，再将分好的三组志愿者安排到 3 个赛区，

由于北京至少安排 2 名志愿者，所以只能 3 人的那组去北京，另外两组可随意安排，有 A_2^2 种，

故这一类有 $\dfrac{C_5^3C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_2^2=20$ 种方法；

②若按 $2+2+1$ 分组，则分组的方法有 $\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}$ 种，再将分好的三组志愿者安排到 3 个赛区，

由于北京至少安排 2 名志愿者，所以先从人数为 2 人的两组中选一组到北京，有 A_2^1 种方法，

剩下的两组分别到延庆、张家口，有 A_2^2 种方法，故这一类有 $\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}\cdot A_2^1\cdot A_2^2=60$ 种方法；

由分类加法计数原理，不同的分配方案共有 $20+60=80$ 种.

12．（2023•全国模拟•★★）由数字 0，1，2，3，4，5，6，7 组成没有重复数字的三位数，则能被 5 整除的三位数共有_____个.

答案：78

解析：要能被 5 整除，最低位必须是 0 或 5，两种情况对最高位的安排影响不同，故应分类考虑最低位，

①若最低位为 0，则百位和十位可随便安排，有 $A_7^2=42$ 种；

②若最低位为 5，则百位不能排 0 或 5，有 A_6^1 种，十位不能排已用的 2 个数字，有 A_6^1 种，共 $A_6^1A_6^1=36$ 种；

由分类加法计数原理，能被 5 整除的三位数共有 $42+36=78$ 个.

13．（2022•北京模拟•★★★）用 0，1，2，3，4，5 这六个数字可以组成无重复数字的四位偶数（　　）

（A）60 个　（B）106 个　（C）156 个　（D）216 个

答案：C

解法 1：由于是四位偶数，所以除了 0 不能排最高位之外，还有最低位应为偶数数字，可先考虑最高位，最高位排奇数数字，还是偶数数字，对接下来最低位的安排有影响，故应分类，

①若最高位排奇数数字，则可从 1，3，5 中选 1 个排在最高位，有 A_3^1 种排法，

再考虑最低位，可从 0，2，4 中选 1 个排在最低位，有 A_3^1 种排法，排好后如图 1，

中间两位可任意排，有 A_4^2 种排法，故这一类共有 $A_3^1A_3^1A_4^2=108$ 种；

②若最高位排偶数数字，则可从 2，4 中选 1 个排在最高位，有 A_2^1 种排法，

再考虑最低位，偶数数字已用掉一个，可从余下的 2 个中选 1 个排最低位，有 A_2^1 种排法，

排好后如图 2，余下的两个位置可任意排，有 A_4^2 种排法，故这一类共有 $A_2^1A_2^1A_4^2=48$ 种；

由分类加法计数原理，满足条件的四位偶数共有 $108+48=156$ 个.

解法 2： 也可以先考虑最低位，最低位排 0 和排其他偶数，对接下来最高位的影响不同，故应分类，

①若最低位是 0，如图 3，其他三位可任意排，故这一类有 $A_5^3=60$ 种；

②若最低位不是 0，则最低位可从 2，4 中选 1 个排上去，有 A_2^1 种排法，排好后如图 4，

接下来最高位不能是 0，故又考虑最高位，0 和最低位已排的数字不能用，还剩 4 个数字，有 A_4^1 种排法，

中间 2 位可从余下的 4 个数字任选 2 个排上去，有 A_4^2 种排法，故这一类有 $A_2^1A_4^1A_4^2=96$ 种；

由分类加法计数原理，满足条件的四位偶数共有 $60+96=156$ 个.

1 ___ ___ 2　　2 ___ ___ 0　　___ ___ ___ 0　　___ ___ ___ 2

图1　　图2　　图3　　图4

14．（2022 • 广州模拟 • ★★★）用数字 0，1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字，且比 20000 大的五位偶数共_____个.

答案： 240

解析： 要求排出的数比 20000 大，故先排最高位，可以是 2，3，4，5，排奇数、偶数对最低位的影响不同，应分类，

①若最高位为 2 或 4，则最高位有 A_2^1 种排法，且排出的数字必定比 20000 大，

再考虑最低位，偶数数字已用掉 1 个，还剩 2 个，任选 1 个排到最低位即可，有 A_2^1 种排法，

其余三个位置可随意排，数字还剩 4 个，所以有 A_4^3 种排法，故这一类共有 $A_2^1A_2^1A_4^3=96$ 种；

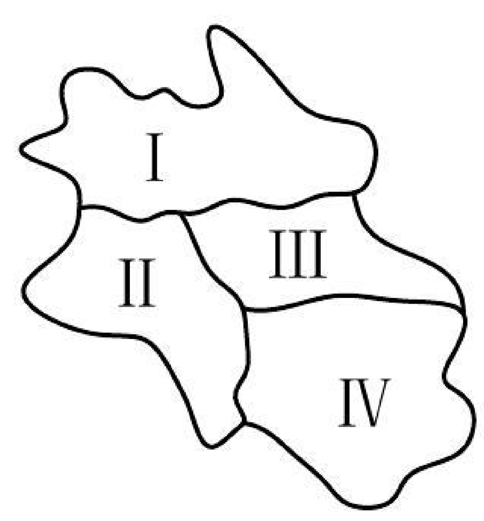
②若最高位为 3 或 5，则最高位有 A_2^1 种排法，且排出的数字必定比 20000 大，

再考虑最低位，可排 0，2，4 中的任意一个数字，有 A_3^1 种排法，

其余三个位置可随意排，数字还剩 4 个，有 A_4^3 种排法，故这一类共有 $A_2^1A_3^1A_4^3=144$ 种；

由分类加法计数原理，比 20000 大的五位偶数共 $96+144=240$ 个.

15．（2023 • 天津和平三模 • ★★★）如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县的地图进行涂色，要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有_____种不同的涂色方法.



答案： 180

解析： 涂色问题用“跳格分类”处理，观察地图发现Ⅰ和Ⅳ属跳格，故讨论它们同色和不同色两种情况，

不妨将 5 种颜色记作①，②，③，④，⑤，若Ⅰ和Ⅳ同色，则它们有 C_5^1 种涂法，涂好后如图 1，

再涂Ⅱ，有 C_4^1 种涂法，涂好后如图 2，最后的Ⅲ有 C_3^1 种涂法，所以这一类共有 $C_5^1C_4^1C_3^1=60$ 种涂法；

若Ⅰ和Ⅳ不同色，则它们有 A_5^2 种涂法，涂好后如图 3，再涂Ⅱ，有 C_3^1 种涂法，涂好后如图 4，

最后的Ⅲ有 C_2^1 种涂法，所以这一类共有 $A_5^2C_3^1C_2^1=120$ 种涂法；

综上所述，全部的涂法共有 $60+120=180$ 种.

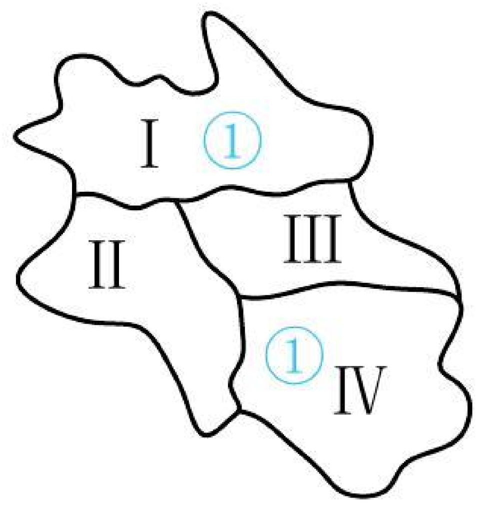


图1

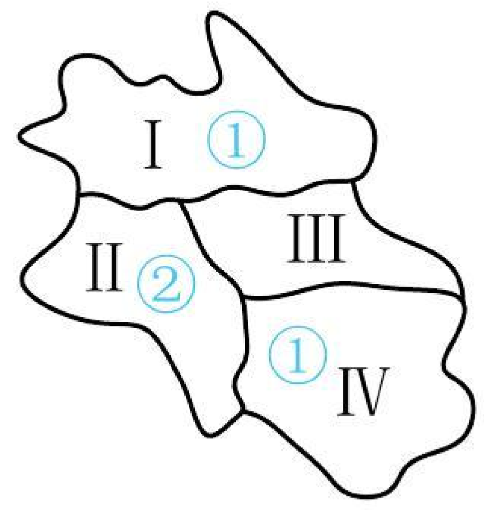


图2

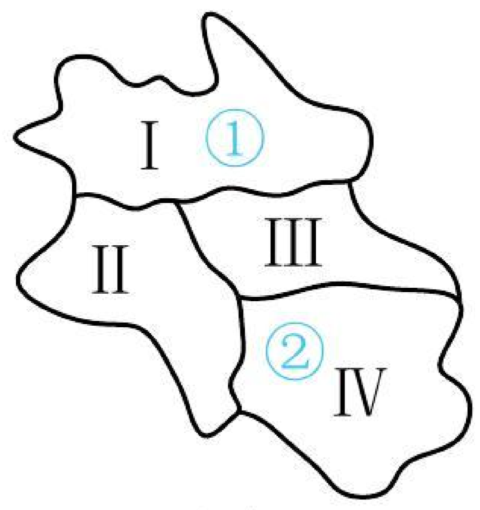


图3

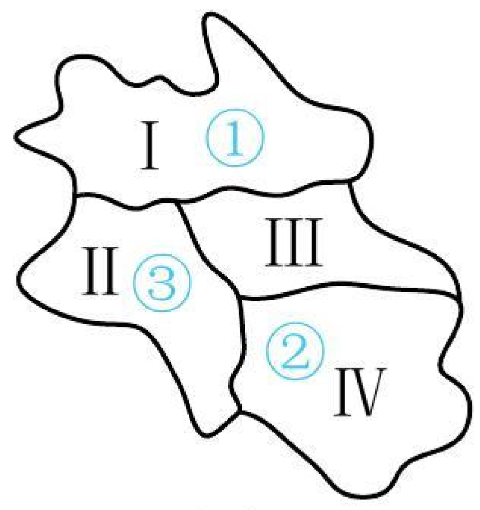
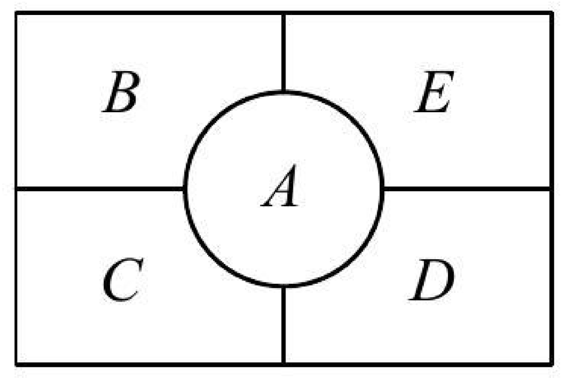


图4

16.（2023·广东珠海模拟·★★★）五一期间，某公园准备用不同的花卉装扮一个有五个区域的矩形花坛（如图），要求同一个区域用同一种花卉，相邻区域不能使用同种花卉，现有 5 种花卉可供选择，则不同的装扮方法共有_____种.（用数字作答）



答案：420

解析：注意到 A 与 B，C，D，E 都相邻，所以先装扮 A，A 用过的，其它几块都不能用了，

记五种不同的花卉分别为①，②，③，④，⑤，由题意，A 有 C_5^1 种装扮方法，

再来看 B，C，D，E，此时可用“跳格分类”处理，B，D 属跳格，不妨对它们分类，

若 B，D 装扮相同的花卉，则 B，D 有 C_4^1 种，如图 1，接下来 C，E 各自有 C_3^1 种装扮方法，

所以这一类共有 $C_5^1C_4^1C_3^1C_3^1=180$ 种装扮方法；

若 B，D 装扮不同的花卉，则 B，D 有 A_4^2 种，如图 2，接下来 C，E 各自有 C_2^1 种装扮方法，

所以这一类共有 $C_5^1A_4^2C_2^1C_2^1=240$ 种装扮方法；

综上所述，不同的装扮方法共有 $180+240=420$ 种.

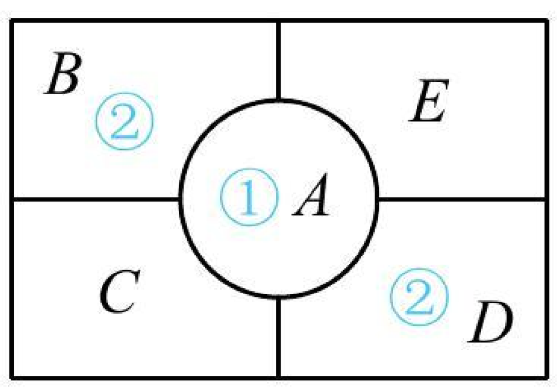


图1

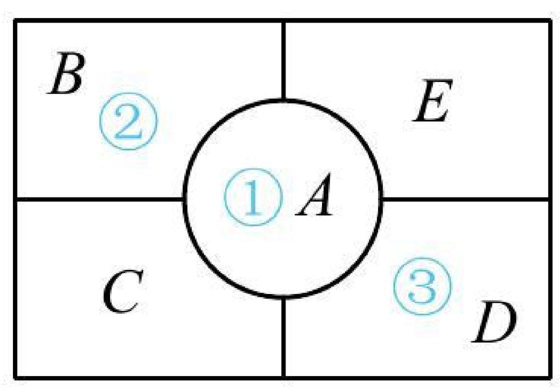


图2

17．（2022 • 重庆模拟 • ★★★★）某地高考规定每一考场安排 24 名考生，编成六行四列就座，若甲乙两位考生在同一考场，那么他们既不前后相邻，也不左右相邻的坐法有_____种.

答案：476

解析：可先安排甲的座位，再看乙有几种坐法，按照与之相邻的座位个数，可把位置分三类，

①若甲坐在四个角落，则甲有 A_4^1 种坐法，如图 1，甲坐好后，乙有 3 个位置不能坐（含甲已坐的位置），所以乙有 A_{21}^1 种坐法，故这一类有 $A_4^1A_{21}^1=84$ 种；

②若甲坐考场外围除去四个角落的位置，则甲有 A_{12}^1 种坐法，如图 2，

甲坐好后，乙有 4 个位置不能坐（含甲已坐的位置），所以乙有 A_{20}^1 种坐法，故这一类有 $A_{12}^1A_{20}^1=240$ 种；

③若甲坐中间的这些位置，则甲有 A_8^1 种坐法，如图 3，甲坐好后，乙有 5 个位置不能坐（含甲已坐的位置），所以乙有 A_{19}^1 种坐法，故这一类有 $A_8^1A_{19}^1=152$ 种；

由分类加法计数原理，满足题意的坐法共有 $84+240+152=476$ 种.

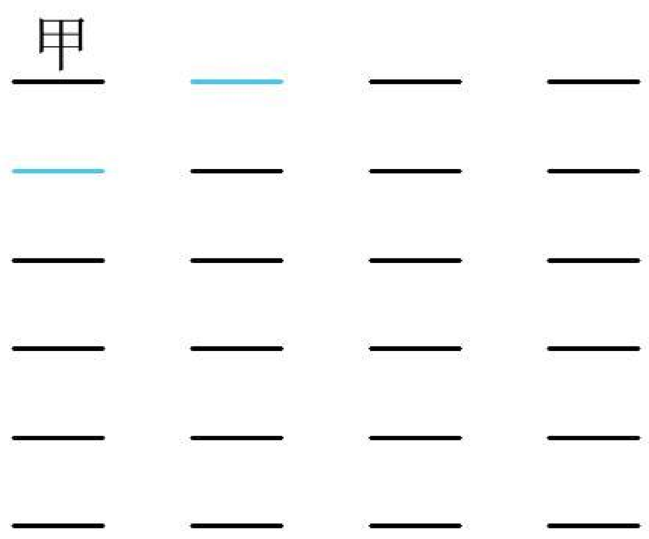


图1

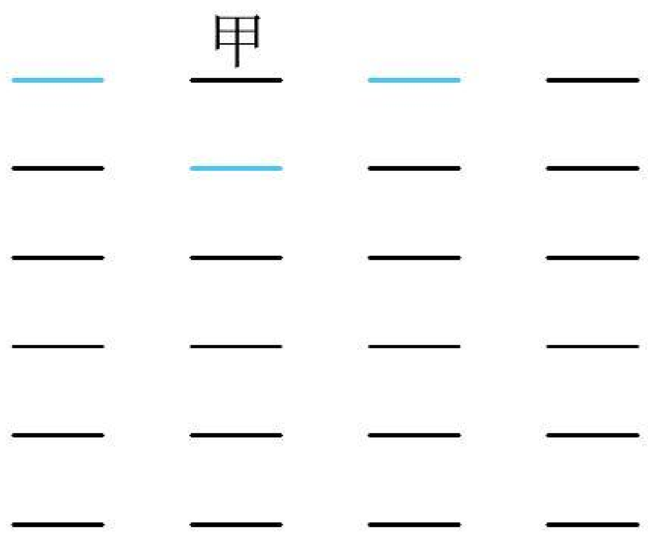


图2

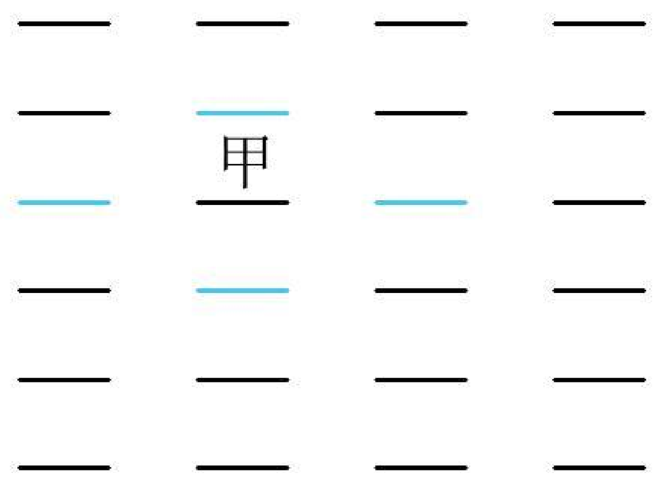


图2